QW のグラフ内部での蓄積量

瀬川悦生 (横浜国立大学)

二部グラフでない有限グラフ上の どの頂点でも隣の頂点に均等な確率で推移するランダムウォーク (RW) は固有値 1 の固有ベクトルで記述される定常状態に収束することがよく知られています．その定常状態は各頂点の次数に比例します．つまり, 人気者の頂点ほど, RW がよく寄り付くということになります．そこで, これに対応する量子性を反映するユニタリ作用素で時間発展する QW(もしくはドレスト光子) の場合は, どのようなものになるのかということが, ここ最近の 私の研究課題になっています．

量子ウォーク (QW) の時間発展のユニタリ性から, 固有値の絶対値がすべて 1 なので, 定常状態への収束に関しては一工夫必要です．有限グラフ G_0 から任意に 2 つ "表面" $\delta G_0 = (u_+, u_-)$ $(u_+ \neq u_-)$ を選んできて, そこへそれぞれ半無限長のパス（これを tail と呼びます）を接続させます．この tail 上では自由 QW のダイナミクスとします．そして, 片方の u_+ に接続している tail からは各時刻 n において, $e^{-i\xi n}$ $(\xi \in \mathbb{R})$ の QW が内部のグラフに流入してくるように初期状態を設定することが可能です．すると, このシステム全体ではもちろんユニタリですが, この時間発展を 内部のグラフ G_0 のみに着目することで, ある力学系として読み直すことが簡単な考察からできます．そして, ある固定点に収束することが示されます [2].

このように QW がある定常状態に収束することが保障されているので, 次の課題として, その定常状態の特徴づけがあげられます．今回はこの定常状態において, 次のことについて考えてみたいと思います．

(1) **グラフの表面での様子**: グラフの表面 u_+, u_- から各 tail へ跳ね返ってくる内部グラフからの応答 (β_+, β_-) に着目します．

(2) **グラフの内部での様子**: 定常状態を ψ_∞ とし, 内部グラフ $G_0 = (V_0, A_0)$ における量子ウォーカーの蓄積量,

$$\mathcal{E}_{QW}(G_0; u_+, u_-; \xi) := \frac{1}{2} ||\ \psi_\infty|_{G_0}\ ||^2$$

に着目します．

こうすることにより, ある振動数で流入する量子ウォーカーにとって, どのようなグラフの構造で, tail をどのように接続すれば, 蓄積しやすいかがわかるようになることが期待されます．

すると, Grover walk と呼ばれる, よく研究されている QW において, 一定の流入を受ける場合, すなわち $\xi = 0$ のとき, 次のようになります．

$$(\beta_+, \beta_-) = (0, 1)$$
$$\mathcal{E}_{QW}(G_0; u_+, u_-; 0) = \frac{1}{4}\left(\frac{\kappa_2(G_0; \delta V)}{\kappa_1(G_0)} + |E_0|\right).$$

ここで, $\kappa_1(G_0)$ は G_0 の全域木の個数 (複雑度と呼ばれています), さらに $\kappa_2(G_0; u_+, u_-)$ は u_+, u_- が異なる木に含まれる, 2 本の木を連携成分にもつ全域森の個数です．少し解りにくいの

で, この後で, 例として頂点 3 のサイクルの場合で説明していますのでそちらもご覧ください. いずれにしても, このようにして, $\xi = 0$ のときには, グラフを注意深くよく眺めて 2 つの特徴量を数え上げるだけで, QW の内部グラフでの蓄積量を計算できるということが今回の最も強調したい点です.

例：$G_0 = C_3$(頂点 3 のサイクル) の場合.
G_0 の全域木は 3 本ある辺の中でどの辺を削除するかで 3 通りなので, $\kappa_1(G_0) = 3$. 一方で, 2 つの木で構成される全域森は, 1 点でも木とみなすことに注意すると, どの 1 点を孤立点とするかで 3 通り. ところがそのうちの一つは u_+ と u_- を同時に含むので, 除外しなければならないので, $\kappa_2(G_0; u_+, u_-) = 2$. C_3 の辺の本数は 3 なので, $|E_0| = 3$. したがって,

$$\mathcal{E}_{QW}(C_3; \delta V) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + 3\right) = \frac{11}{12}.$$

ところで, QW にとって居心地の良い $\kappa_2(G_0; u_+, u_-)/\kappa_1(G_0)$ が大きなグラフとは直観的にはどのようなものなのでしょうか？ 実はこの量は電気回路のエネルギーと密接に関係があり, 1 ボルトの電圧を u_+ と u_- の間にかけたときときに流れる電流に比例します. 詳しくは例えば [3] を見てください. つまり, 電流が流れやすいものほど, QW にとっては居心地がよいということです. また, この電流の逆数, つまり有向抵抗と, 均等な確率で各ステップで隣接頂点に推移する RW の立場から考察する研究の蓄積 [1] があるので, これらを用いてさらにもう少し直観的な説明が付け加えられそうです. 　実際に, 例えば, この RW が u_+ から出発して初めて u_- にヒットする平均到達時間と逆に u_- から出発して初めて u_+ にヒットする平均到達時間の和を commute time と呼び $C(G_0; u_+.u_-)$ とします. 　すると, 次のような $\mathcal{E}_{QW}(G_0; u_+, u_-)$ の別表現が与えられます.

$$\mathcal{E}_{QW}(G_0; \delta V) = \frac{|E_0|}{4}\left(\frac{2}{\deg(u_+)C(G_0; u_+, u_-)} + 1\right).$$

但し, $\deg(u_+)$ は u_+ の G_0 での次数です. つまり, 直観的には RW にとっては出口に早くでていきたくなるような “居心地の悪い” グラフほど、QW にとっては “居心地の良い” グラフになるといえそうです.

今回は $\xi = 0$ の場合のみについて, 電流やランダムウォークといった良く知られたものを登場させて説明しましたが, それ以外の場合は, 全く別の様相になることが予想されています. 例えば交代入力, $\xi = \pi$ の場合に関しても, 最近の我々の研究の中で解ってきて,「１つのツリー」と「奇サイクルを１つだけ持つグラフ達」で構成される全域部分グラフの数え上げなどが必要になり, 新しい特徴量が誘導されます. この研究の当初はどちらかというと, 解析的な手法に基づいた考察でしたが, 最近ではこのようなグラフをじっと眺めた数え上げ組合せ論的なものに基づいても研究が展開できることが解り, さらなる進展が期待できそうです.

References

[1] Doyle, G. and Snell, L.: Random Walks and Electric Networks, Carus Mathematical Monographs, Book 22, Mathematical Association of America(1984).

[2] Higuchi, Yu., Segawa, E.: Dynamical system induced by quantum walks, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **52** (39) (2019)

[3] 高崎 金久: 線形代数とネットワーク, 日本評論社 (2017)